Apellido paterno:	Apellido materno:	Nombre:

Pregunta 1	Pregunta 2	Pregunta 3	Total	Nota

Instrucciones:
- **NO HAY CONSULTAS**. Las respuestas sin desarrollo o sin justificación, no dan puntaje.
- Conteste en forma ordenada, una pregunta por hoja y justifique adecuadamente cada respuesta.
- Debe realizar su prueba en su respectiva sección, de lo contrario será calificado con nota mínima.
- Queda prohibido el uso de calculadoras, formulario y **celulares**.

Nota $= 1 + \dfrac{Puntos}{10}$. **Duración** = 60 minutos

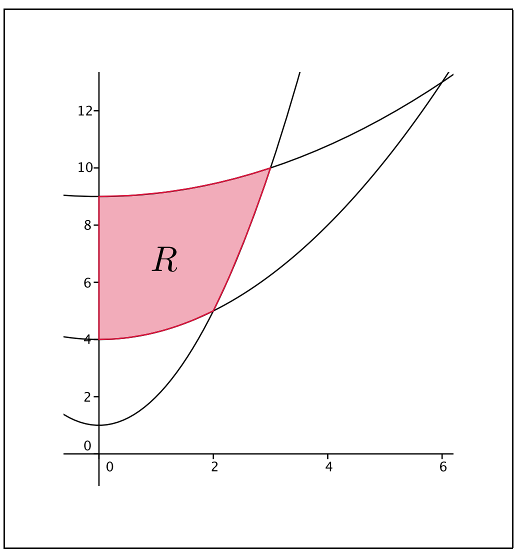
---

1) **[15 ptos.]** Decidir si la función $y = x \displaystyle\int_1^{x^2} \sqrt{1+t^2}\, dt$ satisface la ecuación

$$x\frac{dy}{dx} - y = 2x^3 \cdot \sqrt{1+x^4}$$

2) **[25 ptos.]** Sea R la región del plano limitadas por las curvas:

$9y - x^2 - 81 = 0$, $4y - x^2 - 16 = 0$, $y - x^2 - 1 = 0$ y el eje Y en el primer cuadrante, como se muestra en la figura.



a) **[15 ptos.]** Expresar **SIN CALCULAR** las integrales que permiten calcular al Área R respecto al eje X y al eje Y.

b) **[10 ptos.]** Expresar **SIN CALCULAR** el volumen del sólido en revolución que se genera al girar la región R en torno a la recta $x = 5$.

3) **[20 ptos.]** Determine si es que existe, el o los valores del parámetro $a \in \mathbb{R}$, de modo que

$$\int_0^1 ax^2 \ln(x)\, dx = 1$$

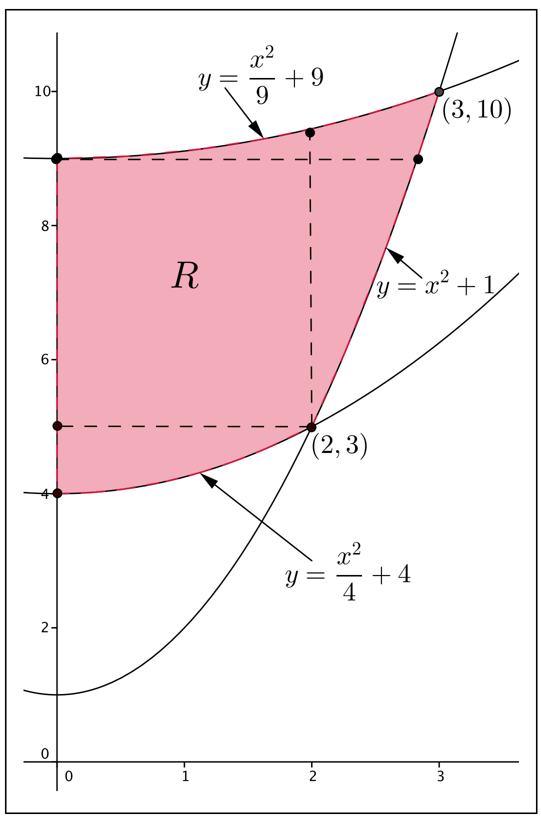
Pauta

1) $y = x\int_0^{x^2} \sqrt{1+t^2}\,dt$

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \int_1^{x^2} \sqrt{1+t^2}\,dt + 2x\cdot x\sqrt{1+x^4} && \text{9 pts}\\
x\frac{dy}{dx} &= x\int_1^{x^2} \sqrt{1+t^2}\,dt + 2x^3\sqrt{1+x^4} && \text{3 pts}\\
x\frac{dy}{dx} - y &= x\int_1^{x^2} \sqrt{1+t^2}\,dt + 2x^3\sqrt{1+x^4} - x\int_1^{x^2} \sqrt{1+t^2}\,dt &&\\
&= 2x^3\sqrt{1+x^4} && \text{3 pts}
\end{aligned}$$

Por lo tanto y satisface la ecuación

2) Gráfica:



a) $A_x = \int_0^2 \left[\left(\frac{x^2}{9}+9\right) - \left(\frac{x^2}{4}+4\right)\right] dx + \int_2^3 \left[\left(\frac{x^2}{9}+9\right) - (x^2+1)\right] dx$ 8 pts

$A_y = \int_4^5 \sqrt{4y-16}\,dy + \int_5^9 \sqrt{y-1}\,dy + \int_9^{10} (\sqrt{y-1} - \sqrt{9y-81})\,dy$ 7 pts

b) $V = 2\pi\int_0^2 (5-x)\left(\frac{x^2}{9}+9-\frac{x^2}{4}-4\right) dx + 2\pi\int_2^3 (5-x)\left(\frac{x^2}{9}+9-x^2-1\right) dx$ 10 pts

3) Por definición se tiene que:

$$\int_0^1 x^2 \ln(x)\, dx = \lim_{c\to 0^+} \int_c^1 x^2 \ln(x)\, dx$$

5 pts

Luego usando integración por partes tenemos que :

$$\begin{aligned}
\lim_{c\to 0^+} \int_c^1 x^2 \ln(x)\, dx &= \lim_{c\to 0^+} \left[\frac{x^3}{3}\ln(x) - \frac{1}{3}\int_c^1 x^2\, dx\right] \\
&= \lim_{c\to 0^+} \left[\frac{x^3}{3}\ln(x) - \frac{1}{9}x^3\Big|_{x=c}^{x=1}\right] \\
&= \lim_{c\to 0^+} \left[-\frac{1}{9} - \left(\underbrace{\frac{c^3}{3}\ln(c)}_{(*)} - \frac{c^3}{9}\right)\right]
\end{aligned}$$

5 pts

Usando L'Hopital en $(*)$, se tiene:

$$\lim_{c\to 0^+}\left(\underbrace{\frac{c^3}{3}\ln(c)}_{(*)}\right) = \frac{1}{3}\lim_{c\to 0^+}\frac{\ln(c)}{\frac{1}{c^3}} \overset{[\frac{\infty}{\infty}]}{=} \frac{1}{3}\lim_{c\to 0^+}\frac{\frac{1}{c}}{-\frac{3}{c^4}} = \frac{1}{3}\lim_{c\to 0^+} -\frac{1}{3}c^3 = 0$$

5 pts

Luego $\lim_{c\to 0^+}\left[-\frac{1}{9} - \left(\frac{c^3}{3}\ln(c) - \frac{c^3}{9}\right)\right] = -\frac{1}{9}$

Por lo tanto

$$a\int_0^1 x^2 \ln(x)\, dx = 1 \Rightarrow a = -9$$

5 pts